

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Кафедра прикладної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

В.о. декана факультету
Математики і інформатики

Євген МЕНЯЙЛОВ



2025 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Варіаційне числення та оптимальне керування

(назва навчальної дисципліни)

рівень вищої освіти _____ перший (бакалаврський) рівень _____
галузь знань _____ 11 Математика і статистика _____
(шифр і назва)
спеціальність _____ 113 Прикладна математика _____
(шифр і назва)
освітня програма _____ Прикладна математика _____
(шифр і назва)
спеціалізація _____
(шифр і назва)
вид дисципліни _____ обов'язкова _____
(обов'язкова / за вибором)
факультет _____ математики і інформатики _____

2025/2026 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

“26” серпня 2025 року, протокол № 10

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ: *Бєбія Максим Отарійович*, кандидат фізико-математичних наук, доцент закладу вищої освіти кафедри прикладної математики

Програму схвалено на засіданні кафедри прикладної математики

Протокол від “26” серпня 2025 року № 13

Завідувач кафедри прикладної математики


(підпис)

Валерій КОРОБОВ
(ім'я та прізвище)

Програму погоджено з гарантом освітньо-професійної програми Прикладна математика

Гарант освітньо-професійної програми Прикладна математика


(підпис)

Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ
(ім'я та прізвище)

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики

Протокол від “26” серпня 2025 року № 1

Голова науково-методичної комісії факультету математики і інформатики


(підпис)

Євген МЕНЯЙЛОВ
(ім'я та прізвище)

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «**Варіаційне числення та оптимальне керування**» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки першого (бакалаврського) рівня «Прикладна математика» спеціальності 113 «Прикладна математика».

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни «Варіаційне числення та оптимальне керування» є навчання майбутніх спеціалістів сучасним методам варіаційного числення та оптимізації, в тому числі у теорії оптимального керування.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є оволодіння засадами теорії екстремальних задач та розвинення здатності ефективно застосовувати методи варіаційного числення та оптимального керування до розв'язання конкретних практичних задач.

1.3. Кількість кредитів 4.

1.4. Загальна кількість годин* 120

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Обов'язкова	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	—
Семестр	
6-й	—
Лекції	
32 год.	—
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	—
Лабораторні заняття	
год.	—
Самостійна робота	
56 год.	—
у тому числі індивідуальні завдання	
—	—

* у разі формування малочисельних груп обсяг аудиторного навчального навантаження, відведеного на вивчення навчальної дисципліни, зменшується відповідно до Положення про планування й звітування науково-педагогічних працівників Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна.

1.6. Перелік компетентностей, що формує дана дисципліна

Дисципліна «Варіаційне числення та оптимальне керування» забезпечує набуття здобувачами освіти **компетентностей**:

– *інтегральна*:

ІК01. Здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми прикладної математики у професійній діяльності або у процесі навчання, що передбачає застосування математичних теорій та методів і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.;

– *загальні*:

ЗК02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;

ЗК06. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;

– *фахові*:

ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем;

ФК03. Здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проєктування, керування, прогнозування, прийняття рішень;

ФК14. Здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату;

ФК18. Здатність оцінити рівень математичного обґрунтування методів, які застосовуються для розв'язання конкретних прикладних задач;

1.7. Перелік результатів навчання, що формує дана дисципліна

ПРН01. Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці.

ПРН06. Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів.

ПРН10. Володіти методиками вибору раціональних методів та алгоритмів розв'язання математичних задач оптимізації, дослідження операцій, оптимального керування і прийняття рішень, аналізу даних.

ПРН21. Демонструвати розуміння загальних принципів побудови математичних теорій, основних понять логіки, уміти формулювати та доводити математичні твердження.

ПРН22. Уміти отримувати змістовні висновки, наводити та аналізувати приклади і контрприкладів, перевіряти і обґрунтовувати правильність застосованих міркувань і отриманих розв'язків.

1.8. Пререквізити: знання отримані при вивченні таких освітніх компонент, як ОК6 «Математичний аналіз», ОК8 «Лінійна алгебра», ОК11 «Диференціальні рівняння», ОК22 «Теоретична механіка».

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Задача варіаційного числення

Тема 1. Рівняння Ейлера.

Постановка задачі варіаційного числення, приклади. Поняття варіації. Рівняння Ейлера як необхідна умова екстремуму першого порядку. Екстремалі. Задачі з рухомими кінцями. Ламані екстремалі. Необхідні умови у задачі Больца та ізопериметричній задачі.

Тема 2. Необхідні і достатні умови другого порядку для слабкого екстремуму.

Сильний та слабкий екстремум. Поняття другої варіації. Необхідна умова Лежандра. Спряжені точки. Необхідна умова Якобі. Достатні умови другого порядку для слабкого екстремуму.

Тема 3. Умови сильного екстремуму.

Поняття поля екстремалей. Необхідна і достатня умова Вейерштрасса.

Розділ 2. Теорія керування

Тема 4. Керованість лінійних систем.

Постановка задачі керованості. Керованість лінійних систем, критерій Калмана. Побудова керувань, що розв'язують задачу потрапляння із токи в точку за заданий час для повністю керованих лінійних систем.

Тема 5. Спостережуваність лінійних систем.

Постановка задачі спостережуваності. Критерії спостережуваності для лінійних систем.

Тема 6. Керування нелінійними системами.

Керованість та стабілізованість нелінійних трикутних систем. Теорема Коробова. Відображення трикутних систем на лінійні. Знаходження оберненого відображення.

Розділ 3. Задача оптимального керування

Тема 7. Лінійна задача швидкодії.

Постановка лінійної задачі швидкодії. Множина досяжності і її властивості. Принцип максимуму Понтрягіна для лінійної задачі швидкодії.

Тема 8. Загальна задача оптимального керування.

Постановка загальної задачі оптимального керування. Формулювання принципу максимуму Понтрягіна. Умови трансверсальності. Задача варіаційного числення як задача оптимального керування.

Тема 9. Задача оптимальної стабілізації.

Постановка задачі оптимальної стабілізації. Перша теорема Красовського.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	Усього	у тому числі				
л		п	лаб	інд	ср	
1	2	3	4	5	6	7
Розділ 1. Задача варіаційного числення						
Тема 1. Рівняння Ейлера.	14	6	4			4
Тема 2. Необхідні і достатні умови другого порядку для слабкого екстремуму.	14	4	4			6
Тема 3. Умови сильного екстремуму.	10	2	2			6
<i>Контрольна робота</i>	2		2			
Разом за розділом 1	40	12	12			16
Розділ 2. Теорія керування						
Тема 4. Керованість лінійних систем.	15	4	2			9
Тема 5. Спостережуваність лінійних систем.	12	2	2			8
Тема 6. Керування нелінійними системами.	11	2	2			7
Разом за розділом 2	38	8	6			24
Розділ 3. Задача оптимального керування						
Тема 7. Лінійна задача швидкодії.	17	6	6			5
Тема 8. Загальна задача оптимального керування.	12	4	4			4
Тема 9. Задача оптимальної стабілізації.	11	2	2			7
<i>Контрольна робота</i>	2		2			
Разом за розділом 3	42	12	14			16

Усього годин	120	32	32			56
---------------------	------------	-----------	-----------	--	--	-----------

4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера.	2
2	Задача Больца, ізопериметрична задача	2
3	Умови другого порядку слабкого екстремуму в задачі варіаційного числення.	4
4	Умови сильного екстремуму.	2
5	Контрольна робота з варіаційного числення.	2
6	Теорія керування. Керованість лінійних систем.	2
7	Спостережуваність лінійних систем.	2
8	Керування нелінійними системами.	2
9	Задача керованості в теорії оптимального керування. Лінійні керовані системи. Потрапляння з обмеженим керуванням.	2
10	Задача лінійної швидкодії, принцип максимуму Понтрягіна.	2
11	Задача найскорішої зупинки візка, задача зупинки маятника.	2
12	Загальна задача оптимального керування, принцип максимуму Понтрягіна.	2
13	Умова трансверсальності.	2
14	Контрольна робота	2
15	Задача оптимальної стабілізації.	2
	Разом	32

5. Завдання для самостійної робота

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Виконання домашніх завдань та вивчення матеріалів за розділом «Задача варіаційного числення».	16
2	Виконання домашніх завдань та вивчення матеріалів за розділом «Теорія керування».	24
3	Виконання домашніх завдань та вивчення матеріалів з теми «Лінійна задача швидкодії».	3
4	Дослідити питання про час потрапляння з більшою кількістю перемикачів по темі «Лінійна задача швидкодії» в задачі про найскорішу зупинку візка,.	2
5	Розв'язування задач та вивчення матеріалів з теми «Загальна задача оптимального керування».	4
6	Виконання домашніх завдань та вивчення матеріалів з теми «Задача оптимальної стабілізації».	7
	Разом	56

6. Індивідуальні завдання

Не передбачені навчальним планом.

7. Методи навчання

Пояснювально-ілюстративні лекції, репродуктивні і частково-пошукові методи при проведенні практичних занять. Лекції, практичні заняття, проведення поточного та підсумкового контролю здійснюються з використанням елементів дистанційного навчання в системі LMS Moodle та програми для організації відео-конференцій ZOOM Workplace.

8. Методи контролю

1. Перевірка виконання домашніх завдань
2. Облік відвідування аудиторних занять
3. Перевірка контрольних робіт
4. Усне опитування
5. Перевірка екзаменаційної роботи

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання						Екзамен	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Розділ 3	Контрольні роботи, передбачені навчальним планом	Індивідуальне завдання	Разом		
T1–T3	T4–T6	T7-T9					
15	15	10	20	---	60	40	100

T1–T9 – теми розділів.

Поточний контроль, самостійна робота – до 40 балів,

контрольні роботи – до 20 балів,

екзаменаційна робота – до 40 балів.

Для допуску до складання підсумкового контролю (екзамену) здобувач вищої освіти повинен набрати не менше 10 балів з навчальної дисципліни під час поточного контролю, самостійної роботи.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Поточний контроль враховує активність під час практичних занять та правильність виконання домашніх завдань.

Перша контрольна робота полягає у розв'язанні задачі варіаційного числення. **Друга контрольна** робота полягає у розв'язанні задачі оптимального керування. Кожна з робіт оцінюється максимум у 10 балів відповідно до правильності та повноти розв'язання. Незначні арифметичні помилки, які якісно не вплинули на результат, не впливають на кількість балів.

Екзаменаційний білет складається з двох теоретичних питань та однієї задачі. Кожне з теоретичних питань оцінюється максимум у 15 балів. Максимальну кількість балів можна отримати, якщо сформулювати та довести відповідні твердження, навести необхідні приклади. Якщо студент правильно описав ідею доведення, але не зміг до кінця привести відповідні викладки, то він отримує максимум 12 балів. У випадку, коли студент зробив помилки при формулюванні тверджень або не зміг пояснити ідею доведення чи навести приклади, він отримує максимум 5 балів. Максимальна оцінка за задачу складає

10 балів. Незначні арифметичні помилки, які якісно не вплинули на результат, не впливають на кількість балів.

Шкала оцінювання (чотирирівнева)

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
	для чотирирівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно
70-89	добре
50-69	задовільно
0-49	незадовільно

10. Рекомендована література

Основна література

1. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В., Ловейкін Ю.В. Варіаційне числення та методи оптимізації. – К.: Київський національний ун-т імені Тараса Шевченка, 2010. - 212 с.
https://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/03/var_chisl.pdf
2. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – К.: Либідь, 1994. – 328 с.
3. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – К.: Либідь, 1996. – 440 с.
http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/Pak_1996_440.pdf
4. Моклячук М. П. Збірник задач з варіаційного числення та методів оптимізації.– Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. – 255 с.
5. Башняков О.М., Пічкур В.В. Задача синтезу в теорії керування: Навчальний посібник. - К.: Вид-во "Сталь", 2012. - 116 с.
<https://csc.knu.ua/library/books/bashniakov-19.pdf>
6. Корнієнко В.І., Гусев О.Ю., Герасіна О.В., Щокін В.П. Теорія систем керування: підручник. – Дніпро: НГУ, 2017. – 497 с.
<https://ir.nmu.org.ua/jspui/bitstream/123456789/152814/1/CD1005.pdf>

Допоміжна література

1. John A. Burns, Introduction to the calculus of variations and control with modern applications. – CRC Press Taylor & Fransis Group, Boca Raton, 2014. – 544 p.
2. E.B. Lee and L. Markus, Foundations of optimal control theory. – John Wiley, New York, 1967. – 576 p.
3. Піддубний О.М., Харкевич Ю.І. Варіаційне числення та методи оптимізації. Луцьк: Східноєвроп. нац. ун-т імені Лесі Українки, 2017. – 332 с.
4. Клименко М.І., Панасенко Є.В., Стреляєв Ю.М., Ткаченко І.Г. Варіаційне числення та методи оптимізації. Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – 84 с.

11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. https://uk.wikipedia.org/wiki/Варіаційне_числення
2. https://uk.wikipedia.org/wiki/Теорія_оптимального_управління